

УДК 004.09

DOI 10.52167/1609-1817-2025-136-2-464-471

А.Е. Исмайылов¹, А.А. Тургынбаева², Р.Б. Айтбаева²

¹Kazakh National Women's Teacher Training University, Алматы, Казахстан

²Almaty Technological University, Алматы, Казахстан

E-mail: turgynbaevaaliza@gmail.com

АНАЛИЗ ДИНАМИКИ СИСТЕМ В БИЛИНЕЙНЫХ ИГРАХ: МЕТОДЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Аннотация. В статье рассматривается важность анализа динамики систем в контексте билинейных дифференциальных игр, которые представляют собой мощный инструмент для моделирования взаимодействий между конкурирующими агентами. Билинейные игры позволяют исследовать стратегии игроков, когда их выигрыши зависят от произведения выбранных действий. В условиях динамического и многокомпонентного окружения, такие модели становятся особенно актуальными для понимания сложных систем, включая экономические, экологические и социальные аспекты.

В данной статье особое внимание уделено методам анализа динамики систем в нелинейных играх. Статья охватывает современные методы анализа динамики, включая численные и аналитические подходы, применяемые для решения билинейных игр. Рассматриваются алгоритмические стратегии, такие как метод динамического программирования и уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана (ГЯБ), которые находят широкое применение в разработке оптимальных решений. Дополнительно подчеркивается значимость междисциплинарного подхода, где теоретические знания из математики, экономики и природных наук интегрируются для улучшения понимания поведения агентов в сложных динамических системах.

Ключевые слова. Билинейные дифференциальные игры, агент, теории игр, динамическом программировании, управлению ресурсами.

Введение.

В современных условиях многие системы, включая экономические, экологические и социальные, являются многокомпонентными и динамичными. Модели билинейных игр позволяют анализировать взаимодействие различных агентов в условиях конкуренции и сотрудничества, что делает их особенно важными для понимания процессов, происходящих в этих системах.

Билинейные дифференциальные игры являются важным классом оптимизационных задач в теории игр и динамическом программировании. Эти игры охватывают широкий класс конкурентных взаимодействий, где стратегии игроков могут зависеть от состояния системы.

В приложениях дифференциальных игр часто изучаются различные конфликтноуправляемые процессы в экономике, экологии, менеджменте и других сферах человеческой деятельности, которые развиваются во времени, а затем заканчиваются в фиксированный момент времени. Кроме того, в последнее время многие задачи, особенно в экономических приложениях, рассматриваются на бесконечном временном промежутке при условии дисконтирования мгновенных выигрышей во времени [1].

Моделирование и анализ сложных систем занимают особое место в развитии современной науки и техники. С этой точки зрения исследование нелинейных систем и их динамики является одним из важных направлений. Нелинейные системы — это динамические модели, которые являются нелинейными, то есть их взаимосвязь между

входом и выходом не описывается линейной функцией. Они часто демонстрируют хаотичное, нелинейное поведение, что делает изучение их природы сложным и интересным.

Основной особенностью нелинейных систем является их нестабильное, порой непредсказуемое поведение. Они очень чувствительны к различным параметрам и начальным условиям, что делает их динамику уникальной. Для понимания свойств таких систем используются методы математического моделирования. Особое внимание уделено теории хаоса, поскольку хаотические системы встречаются во многих нелинейных системах.

Роль математических средств и методов очень важна при изучении нелинейных игр. С развитием вычислительной техники появились возможности анализа больших данных, моделирования и симуляции. Сегодня исследователи могут детально изучать поведение сложных систем с помощью компьютерного моделирования. Эти методы позволяют не только понимать результаты, но и делать прогнозы и разрабатывать стратегии управления.

Распространение информации в социальных сетях, изучение экономического равновесия и управление биологическими экосистемами занимают особое место среди прикладных исследований. Например, динамика распространения информации в социальных сетях описывается билинейными моделями, поскольку поведение каждого агента зависит от поведения других агентов. Изучение этих систем оказывает большую помощь в области маркетинга, политики и прогнозирования важных изменений в обществе.

Кроме того, нелинейные игры широко используются при управлении энергетическими ресурсами. Например, существует необходимость моделирования взаимодействия различных агентов для повышения энергоэффективности. Нахождение и поддержание баланса в таких системах может способствовать достижению экологической устойчивости на глобальном уровне.

Билинейные игры имеют большое значение не только с теоретической, но и с практической точки зрения. Они используются в экономических моделях, биологических системах, системах управления энергоэффективностью и даже в социальных сетях и кибербезопасности. Например, взаимодействие нескольких игроков на рынке или взаимоотношения различных организмов в экосистеме демонстрируют нелинейное поведение. В связи с этим изучение их динамики может открыть путь к новым научно-техническим достижениям в будущем. Исследование этой области предоставляет важные инструменты для оптимизации взаимодействия агентов в сложных системах и может привести к более эффективному управлению ресурсами в условиях неопределенности [2].

Анализ динамики систем в билинейных играх представляет собой область, в которой пересекаются теория игр, математическое моделирование и прикладная математика. Анализ динамики систем в билинейных играх является актуальной темой, которая связывает теорию и практику, имея заметное влияние на ряд дисциплин и практических приложений.

Цель данной работы заключается в исследовании и анализе динамики систем в рамках билинейных дифференциальных игр с акцентом на разработку методов и применение этих моделей в различных областях.

Ожидается, что результаты исследования будут полезны как для ученых и студентов, так и для практиков, заинтересованных в использовании теорий игр для анализа и оптимизации сложных систем в условиях неопределенности.

Работа подчеркивает значимость дальнейших исследований в этой области, нацеленных на разработку устойчивых решений для современного мира, что способствует

более эффективному принятию решений и управлению ресурсами в динамично меняющихся условиях.

Основные определения.

Билинейная игра - это игра, где выгоды или потери игроков зависят от произведения выбранных стратегий двух игроков. Линейные функции защиты и потерь являются важными для анализа.

Дифференциальная игра - это игра, в которой игроки принимают решения, зависящие от времени, и их цели описываются динамическими системами.

Терминальная поверхность - в контексте дифференциальных игр это ограничения или цель, которая должна быть достигнута к концу игры (например, сумма выигрыша или состояния системы).

Материалы и методы.

Рассмотрим двух игроков, A и B , которые выбирают стратегии, зависящие от текущего состояния системы $x(t)$ и времени t . Пусть $u_{A(t)}$ и $u_{B(t)}$ обозначают стратегии первого и второго игрока соответственно.

Условия игры

1. Состояние системы:

$$\dot{x} = f(x(t), u_{A(t)}, u_{B(t)}). \quad (1)$$

Здесь f — функция, описывающая динамику состояния x .

2. Выгода игроков:

Для игрока A :

$$J_A = \int_0^T L_A(x(t), u_A(t), u_B(t)) dt + \phi_A(x(T)). \quad (2)$$

Для игрока B :

$$J_B = \int_0^T L_B(x(t), u_A(t), u_B(t)) dt + \phi_B(x(T)). \quad (3)$$

Здесь L_A и L_B — функции потерь, зависящие от состояния и действий игроков;

ϕ_A и ϕ_B — терминальные функции, которые описывают выгоды в конце игры.

Пример: Билинейная игра с несколькими терминальными поверхностями.

Предположим, что мы рассматриваем игру, где функции потерь задаются следующим образом:

Для игрока A :

$$L_A(x, u_A, u_B) = -x u_A u_B. \quad (4)$$

Для игрока B :

$$L_B(x, u_A, u_B) = -x u_A^2. \quad (5)$$

и терминальные функции:

Для игрока A :

$$\phi_A(x(T)) = \alpha_A x(T)^2. \quad (6)$$

Для игрока B :

$$\phi_B(x(T)) = \alpha_B x(T), \quad (7)$$

где α_A, α_B – положительные константы.

Решение задачи: для решения такой задачи можно использовать методы теории игр, такие как:

- 1) Метод динамического программирования.
- 2) Методы вариационного исчисления для поиска оптимальных стратегий.
- 3) Система уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана для каждой игры.

1. Метод динамического программирования: этот метод используется для решения задач оптимизации, разбивая их на подзадачи и решая их последовательно. Одним из классических способов исследования задачи дискретной оптимизации является метод динамического программирования. На сегодняшний день этот метод относительно редко используется, собственно, для нахождения оптимального решения [3].

2. Методы вариационного исчисления: Эти методы используются для нахождения экстремумов функционалов, что также может быть применимо для поиска оптимальных стратегий в играх.

3. Система уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана: Эта система уравнений является основой динамического программирования и используется для нахождения оптимальных контролей в системах управления.

Мы используем систему уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана.

Система уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана является мощным инструментом для решения задач оптимального управления и теории игр. Она основана на принципе динамической программирования и позволяет находить оптимальные стратегии для игроков в играх, формулируя задачи в виде обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для многопользовательских игр с идеальными игроками, состояние системы можно описывать с помощью функции ценности $V(x, t)$, которая представляет собой минимальную (или максимальную) стоимость для игрока, начиная с состояния x в момент времени t . Основное уравнение ГЯБ для этой ситуации можно записать как:

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = H\left(x, \frac{\partial V}{\partial x}\right), \quad (8)$$

где H — гамильтониан, который зависит от состояний и частных производных функции ценности.

Рассмотрим задачу нахождения оптимальной стратегии для двух игроков, играющих против друг друга. Мы будем использовать простую ситуацию, где наши игроки пытаются минимизировать свою потерю.

Пример кода на Python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# Определяем гамильтониан
def hamiltonian(x, u_A, u_B):
    return -x * u_A * u_B # Пример гамильтониана для двух игроков
# Уравнение Гамильтона–Якоби–Беллмана
def HJB(V, dx, u_A, u_B):
    dV_dx = np.zeros_like(V)
    dV_dx[1:-1] = (V[2:] - V[:-2]) / (2 * dx) # Центральное разностное приближение
```

```
dV_dx[0] = (V[1] - V[0]) / dx # Пограничный случай
dV_dx[-1] = (V[-1] - V[-2]) / dx # Пограничный случай
dV_dt = -hamiltonian(x_space, u_A, u_B) # ГЯБ
return dV_dt
# Метод Рунге-Кутты 4-го порядка
def runge_kutta_4(V, dt, dx, u_A, u_B):
    k1 = HJB(V, dx, u_A, u_B) * dt
    k2 = HJB(V + 0.5 * k1, dx, u_A, u_B) * dt
    k3 = HJB(V + 0.5 * k2, dx, u_A, u_B) * dt
    k4 = HJB(V + k3, dx, u_A, u_B) * dt
    return V + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4) / 6
# Начальные условия
x_space = np.linspace(-5, 5, 100)
V0 = np.zeros_like(x_space)
T = 10 # Конечное время
dt = 0.1 # Шаг времени
num_steps = int(T / dt)
# Решаем уравнение ГЯБ
V_history = np.zeros((num_steps, len(x_space)))
V_history[0] = V0
u_A = 1.0 # Стратегия игрока A (можно менять)
u_B = 1.0 # Стратегия игрока B (можно менять)
for t in range(1, num_steps):
    V_history[t] = runge_kutta_4(V_history[t - 1], dt, x_space[1] - x_space[0], u_A, u_B)
# Визуализация результата
plt.figure(figsize=(10, 5))
for t in range(0, num_steps, int(num_steps / 10)): # Показать 10 временных шагов
    plt.plot(x_space, V_history[t], label=f't = {t * dt:.1f}') # По срокам
plt.xlabel('Состояние x')
plt.ylabel('Функция ценности V(x, t)')
plt.title('Система уравнений Гамильтона–Якоби–Беллмана')
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()
```

1. Гамильтониан: мы определяем гамильтониан, который отражает взаимодействие между двумя игроками. В данном примере это упрощенная модель, но для практических сценариев этот функционал можно модифицировать.

2. Уравнение ГЯБ: функция `HJB` вычисляет изменение функции ценности по времени с использованием центральной разности для производной и гамильтониана.

3. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка: функция “runge_kutta_4” реализует RK4, которое использует четыре промежуточных шага для получения более точного значения функции ценности.

4. Инициализация и интеграция: начальные условия задаются, и метод Рунге-Кутты 4-го порядка применяется на каждом временном шаге.

5. Визуализация: создается график функции (рис 1.) ценности для различных временных шагов. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка дает более точные, особенно для жестких систем.

Результаты:

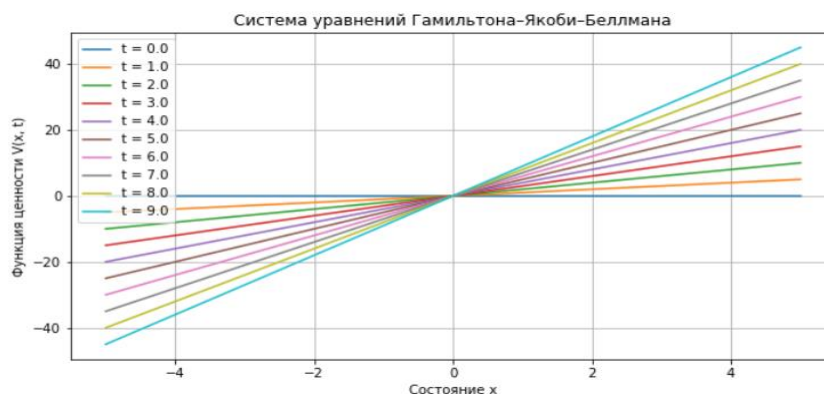


Рисунок 1 - График функции ценности для различных временных шагов

Анализ результатов расчета.

Форма функции ценности $V(x, t)$: как изменяется функция ценности с течением времени? Вы можете наблюдать, как функции ценности изменяются вдоль различных значений x в разные моменты времени. Это может дать понимание о том, как оптимальные стратегии игроков изменяются в зависимости от состояния системы.

Кривизна функции: если функция ценности не является гладкой или показывает резкие изменения, это может указывать на необходимость более точного моделирования или использование более тонких численных методов

Параметры стратегии u_A и u_B : как изменение стратегий игроков влияет на решение? Попробуйте варьировать значения этих параметров и наблюдать за изменениями в функции ценности и оптимальных стратегиях. Это может помочь в понимании чувствительности системы к изменениям в стратегиях игроков.

Сравнение с аналитическими решениями: если возможно, сравните полученные численные результаты с известными аналитическими решениями для проверки правильности расчетов и оценки ошибок. Это может помочь определить, насколько хорошо выбран метод интегрирования (например, RK4) для данной задачи.

Проверка шагов времени и пространства: проанализируйте, как изменение шагов времени dt и пространства dx влияет на результаты. Это может помочь в выборе адекватных стационарных параметров для численного метода.

Графики: построение графиков функции ценности для различных временных шагов позволит лучше визуализировать динамику изменений. Также можно использовать контурные графики, чтобы увидеть, как функция ценности изменяется по пространству и времени.

Экономическая и практическая интерпретация: обсудите, что полученные результаты значат в контексте решаемой задачи. Как они сопоставимы с реальными сценариями? Существуют ли какие-либо практические рекомендации или выводы, которые можно сделать на основе анализа?

Обсуждение.

Если у вас есть визуализация функции ценности, которая показывает, что с течением времени результаты стремятся к определенному значению (например, к нейтральному состоянию), это может указывать на то, что стратегии игроков стабилизируются на определенных уровнях. Если вы обнаружили, что при изменении стратегии одного из игроков существенно меняется функция ценности, это может говорить о сильной взаимосвязи и необходимости учитывать это изменение в дальнейших расчетах.

Заключение.

Анализ результатов расчета по системе ГЯБ должен основываться на всестороннем изучении поведения функции ценности, влияния параметров на решение, сходимости численного метода и практической интерпретации полученных данных. Это позволит сделать выводы о динамике системы и ее оптимальных стратегиях для игроков.

В заключение отметим, что анализ динамики системы в нелинейных играх является одним из актуальных направлений современной науки. Эти исследования позволяют понять природу сложных систем и разработать новые методы управления ими. В будущем ясно, что результаты исследований в этом направлении найдут практическое применение во многих областях, включая экономику, энергетику, биологию и кибербезопасность.

Рассмотренные в статье методы и приложения дают основу для глубокого понимания сущности нелинейных игр и их использования в различных практических ситуациях. Актуальность этого направления исследований возрастает, поскольку многие проблемы современного общества связаны с управлением сложными системами. Таким образом, исследование динамики нелинейных систем представляет не только научный интерес, но и важный инструмент решения глобальных проблем.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. В. Шевкопляс, Уравнение Гамильтона - Якоби Беллмана в дифференциальных играх со случайной продолжительностью, УБС, 2009, выпуск 26, 385–408 с.

[2] Krasovskii, N. A., & Tarasyev, A. M. "Decomposition algorithm of searching equilibria in a dynamic game," Automation and Remote Control, 76(10), 1865-1893, 2015.

[3] А.Г. Ченцов, Экстремальные маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории/А.Г. Ченцов.-М.: РХД, 2007.-240 с.

REFERENCES*

[1] E. V. Shevkoptyas, Uravnenie Gamil'tona - Jakobi Bellmana v differencial'nyh igrakh so sluchajnoj prodolzhitel'nost'ju, UBS, 2009, vypusk 26, 385– 408 s.

[2] Krasovskii, N. A., & Tarasyev, A. M. "Decomposition algorithm of searching equilibria in a dynamic game," Automation and Remote Control, 76(10), 1865-1893, 2015.

[3] A.G. Chencov, Jekstremal'nye marshrutizacii i raspredelenija zadanij: voprosy teorii/A.G. Chencov.-M.: RHD, 2007.-240 s.

Аманкелді Исмайылов, т.ғ.к, Kazakh National Women's Teacher Training University, Алматы, Қазақстан, box_email61@mail.ru

Ализа Тургынбаева, магистр, Almaty Technological University, Алматы, Қазақстан, turgynbaevaaliza@gmail.com

Рахатай Айтбаева, магистр, Almaty Technological University, Алматы, Қазақстан, Rakhatay@mail.ru

БИСЫЗЫҚТЫ ОЙЫНДАРДАҒЫ ЖҮЙЕЛЕР ДИНАМИКАСЫН ТАЛДАУ: ӘДІСТЕРІ МЕН ҚОСЫМШАЛАРЫ

Андатпа. Мақалада бәсекелес агенттер арасындағы өзара әрекеттесуді модельдеудің қуатты құралы болып табылатын бисызықты дифференциалды ойындар контекстіндегі жүйелер динамикасын талдаудың маңыздылығы қарастырылады.

Бисызықты ойындар ойыншылардың стратегияларын зерттеуге мүмкіндік береді, егер олардың ұтыстары таңдалған әрекеттердің жұмысына байланысты болса. Динамикалық және көп компонентті ортада мұндай модельдер экономикалық, экологиялық және әлеуметтік аспектілерді қоса алғанда, күрделі жүйелерді түсіну үшін ерекше маңызды болады.

Бұл мақалада сызықты емес ойындардағы жүйелердің динамикасын талдау әдістеріне ерекше назар аударылады. Мақалада динамиканы талдаудың заманауи әдістері, соның ішінде бисызықты ойындарды шешу үшін қолданылатын сандық және аналитикалық тәсілдер қамтылған. Динамикалық бағдарламалау әдісі және Гамильтон–Якоби–Беллман (ГЯБ) теңдеулері сияқты алгоритмдік стратегиялар қарастырылады, олар оңтайлы шешімдерді әзірлеуде кеңінен қолданылады. Сонымен қатар, күрделі динамикалық жүйелердегі агенттердің мінез-құлқын түсінуді жақсарту үшін математика, экономика және жаратылыстану ғылымдарының теориялық білімдері біріктірілген пәнаралық тәсілдің маңыздылығына баса назар аударылады.

Түйінді сөздер. Бисызықты дифференциалды ойындар, агент, ойындар теориясы, динамикалық бағдарламалау, ресурстарды басқару.

Amankeldi Ismailov, candidate of technical sciences, Kazakh National Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan, box_email61@mail.ru

Aliza Turgynbayeva, master, Almaty Technological University, Almaty, Kazakhstan, turgynbaevaaliza@gmail.com

Rakhatay Aitbaeva, master, Almaty Technological University, Almaty, Kazakhstan, Rakhatay@mail.ru

ANALYSIS OF SYSTEM DYNAMICS IN BILINEAR GAMES: METHODS AND APPLICATIONS

Abstract. The article discusses the importance of analyzing system dynamics in the context of bilinear differential games, which are a powerful tool for modeling interactions between competing agents. Bilinear games allow us to study the strategies of players when their payoffs depend on the product of their chosen actions. In a dynamic and multicomponent environment, such models become especially relevant for understanding complex systems, including economic, environmental and social aspects.

This article pays special attention to methods for analyzing system dynamics in nonlinear games. The article covers modern methods for analyzing dynamics, including numerical and analytical approaches used to solve bilinear games. Algorithmic strategies such as dynamic programming and the Hamilton–Jacobi–Bellman (HJB) equations are considered, which are widely used in developing optimal solutions. Additionally, the importance of an interdisciplinary approach is emphasized, where theoretical knowledge from mathematics, economics and natural sciences is integrated to improve the understanding of agent behavior in complex dynamic systems.

Keywords. Bilinear differential games, agent, game theory, dynamic programming, resource management.

Редакцияға түсті / Поступила в редакцию / Received 25.08.2024

Жариялауға қабылданды / Принята к публикации / Accepted 28.01.2025