

М.Т. Аршидинова<sup>1</sup>, А.К. Кудайкулов<sup>2</sup>, А.А. Ташев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт информационных и вычислительных технологий КН МНВО РК,  
Алматы, Казахстан

<sup>2</sup>Institute of Mechanics and Engineering, Алматы, Казахстан  
E-mail: mukaddas\_arshidi@mail.ru

## МЕТОД, АЛГОРИТМ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

**Аннотация.** В работе рассматривается горизонтальный стержень ограниченной длины переменного сечения. Радиус сечения стержня по ее длине меняется нелинейно. В связи с этим образующий стержня будет криволинейной. Боковая поверхность этого стержня теплоизолированное. Радиус поперечного сечения левого конца стержня меньше, чем правый. На площадь поперечного сечения левого конца стержня подведен тепловой поток постоянной интенсивности. Через площадь поперечного сечения правого конца стержня происходит теплообмен с окружающей средой  $T_{oc}$  [°C]. Рассматривается 5-случаев температуры окружающей среды  $T_{oc} \in [10, 20, 30, 40, 50]$  °C. Численно исследуется влияние температуры окружающей среды на термо-напряженно-деформированное состояние исследуемого стержня. При этом основные разрешающие уравнения выводятся из условия сохранения тепловой энергии. Разработаны алгоритм и программа, позволяющие провести серии вычислительных экспериментов по исследованию термо-напряженно-деформированного состояния стержня с криволинейными образующими под воздействием температуры окружающей среды. Определен закон распределения температуры, а в случае заземления только одного конца стержня определено термическое удлинение. В случае заземления обоих концов стержня определена термическая осевая сила в зависимости от температуры окружающей среды. Также, определены законы распределения термоупругих, температурных и упругих составляющих деформаций, и напряжений в зависимости от значения температуры окружающей среды. Далее методом минимизации потенциальной энергии с учетом поля температуры, определено поле перемещения в зависимости от температуры окружающей среды. Исследование проводилось с применением вычислительного метода основанной на законе сохранения тепловой энергии.

**Ключевые слова:** нелинейное сечение, тепловой поток, теплообмен, температура окружающей среды, удлинение, осевая сила, деформация, напряжение, перемещение.

### Введение.

В настоящее время к решению задач термо-напряженно-деформированного состояния стержня с криволинейной образующей уделяется мало внимания.

Исследование закона распределения температуры в телах различных формах (стержень, конус и т.д.) с использованием вариационного подхода рассмотрены в [1-2]. В этих работах были применены вариационные принципы для исследования закона распределения температуры и напряжения одномерных и двумерных тел, имеющих простую конфигурацию.

В [3-4] исследован ограниченный длиной стержень переменным поперечным сечением. При этом, боковая поверхность стержня изолирована. Тепловой поток подается на левый торец стержня. На правом конце происходит теплообмен с окружающей средой.

В работе с использованием вариационного подхода определяется поле распределения температуры, смещения, три составляющие деформации и напряжений. Здесь же показаны методы получения термомеханических характеристик стержня: удлинение, осевое усилие, законы распределения деформации, напряжения и перемещения.

В [5] предлагается использование разностных схем для уравнения теплопроводности на криволинейных сетках в терминах тепловых потоков, основанные на вариационном принципе. Исследуются свойства разностных операторов и вопросы устойчивости и аппроксимации.

*Постановка задачи.*

Рассматривается горизонтальный стержень ограниченной длины  $L[M]$ . Ось  $OX$  направлен слева на право и совпадает с осью стержня. Радиус стержня меняется нелинейно по закону  $r(x)=ax^2+bx+c, 0 \leq x \leq L$ , где  $a, b, c$  – постоянные величины, такие, что  $r(x=0) < r(x=L)$ . На площадь поперечного сечения левого торца стержня подается тепловой поток с постоянной интенсивностью. Площадь поперечного сечения правого торца стержня равна  $\pi r^2(x=L) = (\pi aL^2 + bL + c)^2$ , а площадь поперечного сечения левого конца стержня -  $\pi r^2(x=0) = \pi \cdot c^2$ . На правом конце стержня происходит теплообмен с окружающей средой, с температурой  $T_{oc}[^{\circ}C]$ . Коэффициент теплообмена  $h = \left[ \frac{Вт}{М^2 \cdot ^{\circ}C} \right]$ .

Боковая поверхность стержня теплоизолирована. В случае заземления только одного конца стержня определяется величина удлинения стержня вследствие наличия теплового потока и теплообмена. В случае заземления обоих концов стержня определяются:

- возникающее осевое температурное усилие;
- законы распределения термоупругих, температурных и упругих составляющих деформаций и напряжений по длине рассматриваемого стержня;
- поле перемещения.

**Материалы и методы.**

Стержень делим на  $n$ -дискретных элементов одинаковой длины. Боковая поверхность всех элементов теплоизолирована. В пределах длины каждого дискретного элемента аппроксимируем поле температуры и перемещения полиномом второго порядка [1].

В нашем случае, рассматриваемый стержень с криволинейной образующей состоит из  $n=4$  элементов одинаковой длины  $l = \frac{L}{4} [M]$ . Далее, для каждого дискретного элемента формируется функционал полной тепловой энергии:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int_{F(x=0)} \frac{h}{2} (T - T_{oc}) ds + \int_{V_1} \frac{K_{xx}}{2} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 dv \\ I_2 &= \int_{V_2} \frac{K_{xx}}{2} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 dv \\ I_3 &= \int_{V_3} \frac{K_{xx}}{2} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 dv \\ I_4 &= \int_{V_4} \frac{K_{xx}}{2} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 dv + \int_{F(x=L)} qT ds \end{aligned} \right\} . \quad (1)$$

Тогда выражение функционала полной тепловой энергии для исследуемого стержня в целом имеет вид:

$$I = \sum_{i=1}^4 I_i . \quad (2)$$

Минимизируя этот функционал по узловым значениям температуры  $T_1, T_2, \dots, T_9$  строится разрешающая система линейных алгебраических уравнений с учетом естественных граничных условий:

$$\frac{\partial I}{\partial T_r} = 0, \quad r = 1 \div 9. \quad (3)$$

Решая эту систему, определяются узловые значения  $T_r, r = 1 \div 9$ .

Далее, в пределах длины каждого дискретного элемента определяется поле температуры:

$$T_r(x) = \frac{2x^2 - 3lx + l^2}{l^2} T_{2r-1} + \frac{4lx + 4x^2}{l^2} T_{2r} + \frac{2x^2 - lx}{l^2} T_{2r+1}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4)$$

$$r = 1 \div 4.$$

Если один конец исследуемого стержня жестко закреплён, а другой свободен, то из-за наличия поле температуры он удлиняется. Величину термического удлинения определяется следующим образом:

$$\Delta L = \int_0^L \alpha T(x) dx \text{ [м]}. \quad (5)$$

где  $\alpha \left[ \frac{1}{^\circ\text{C}} \right]$  – коэффициент теплового расширения материала.

Если оба конца исследуемого стержня жестко закреплены, то в нем возникает термическое осевое усилие  $R[\text{Н}]$ :

$$R = \frac{E \cdot \Delta l_T}{\int_0^L \frac{dx}{F(x)}} \text{ [Н]}. \quad (6)$$

В этом случае, законы распределения термоупругих, температурных и упругих составляющих деформаций, и напряжений определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(x) &= \frac{R}{E \cdot F(x)} \\ \sigma(x) &= \frac{R}{F(x)} \\ \varepsilon_T(x) &= -\alpha \cdot T(x) \\ \sigma_T(x) &= E \cdot \varepsilon_T(x) \\ \varepsilon_x(x) &= \varepsilon(x) - \varepsilon_T(x) \\ \sigma_x(x) &= E \cdot \varepsilon_x(x) \end{aligned} \right\}, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (7)$$

Потенциальная энергия упругих деформации с учетом наличия поле температур, имеет следующий вид:

$$\Pi = \int_V \frac{\sigma_x(x)}{2} dv - \int_V \alpha E \cdot T(x) \varepsilon_x(x) = = \frac{E}{2} \int_V \frac{dU}{dx} dv - \alpha \cdot E \int_V T(x) \frac{dU}{dx} dv. \quad (8)$$

Минимизируя этот функционал по узловым значениям перемещения строится система линейных алгебраических уравнений для определения перемещения узлов:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U_r} = 0, \quad r = 2 \div 8. \quad (9)$$

Из-за заземления обоих концов стержня имеет место, это  $U_1 = U_2 = 0$ .

После определения узловых перемещений  $U_r$ , строится поле перемещения в пределах длины каждого дискретного элемента:

$$U_r(x) = \frac{2x^2 - 3lx + l^2}{l^2} U_{2r-1} + \frac{4lx - 4x^2}{l^2} U_{2r} + \frac{2x^2 - lx}{l^2} T_{2r+1}, \quad r = 1 \div 4; 0 \leq x \leq l. \quad (10)$$

В целях исследования влияния температуры окружающей среды на термо-напряженно-деформированное состояние исследуемого стержня с криволинейной образующей были использованы следующие исходные данные:

$$L=0.2[\text{м}]; n=4; l=\frac{L}{n}=0.05[\text{м}]; K_{xx} = 75 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}; h = 10 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C}};$$
$$r(x)=ax^2+bx+c=0,25x^2-0,025x+0,005; a=0,25; b=0,025; c=0,005;$$
$$\alpha = 0,0000125 \left[ \frac{1}{^\circ\text{C}} \right];$$
$$E = 2 \cdot 10^{11} \left[ \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \right]; q = -500 \left[ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \right];$$
$$T_{oc} \in [50^\circ\text{C}; 40^\circ\text{C}; 30^\circ\text{C}; 20^\circ\text{C}; 10^\circ\text{C}].$$

### Результаты и обсуждение.

Полученные численные результаты показывают, что узловые значения температуры при  $T_{oc} = 40^\circ\text{C}$ , будут в среднем в 1.23 раза меньше чем в случае  $T_{oc} = 50^\circ\text{C}$ . Величина удлинения исследуемого стержня при  $T_{oc} = 40^\circ\text{C}$  будет в среднем в 1.1818 раза меньше по сравнению с  $T_{oc} = 50^\circ\text{C}$ . Но величина возникающего термического осевого усилия при  $T_{oc} = 40^\circ\text{C}$  примерно 1.23 раза меньше чем в случае с  $T_{oc} = 50^\circ\text{C}$ .

Далее, узловые значения всех составляющих деформаций и напряжений, а так же перемещения в случае  $T_{oc} = 40^\circ\text{C}$  примерно в 1.23 раза меньше чем в случае  $T_{oc} = 50^\circ\text{C}$ . Отсюда видно, что при уменьшения температуры окружающей среды на 20% (от  $50[^\circ\text{C}]$  до  $40[^\circ\text{C}]$ ) приводит к уменьшению примерно 1.23 раза искомых параметров, кроме величины термического удлинения стержня. Оно уменьшается примерно в 1.18 раза. Теперь анализируем отношения искомых величин при  $T_{oc} = 50[^\circ\text{C}]$  и  $T_{oc} = 30[^\circ\text{C}]$ . Они в среднем составляют 1.6. Проведенные вычислительные эксперименты также показывает, что уменьшения температуры окружающей среды на 60% приводит к уменьшению значение термического удлинения на 2,16 раза, а остальных параметров примерно 2.28 раза по сравнению с результатами при  $T_{oc} = 50[^\circ\text{C}]$ . Если уменьшить эту температуру окружающей среды на 80% то при  $T_{oc} = 10[^\circ\text{C}]$  полученные отношения в среднем в 4 раза меньше по сравнению с результатами при  $T_{oc} = 50[^\circ\text{C}]$ . При этом значения термического удлинения стержня будет примерно в 4.33 раза меньше чем при  $T_{oc} = 50[^\circ\text{C}]$ .

Полученные результаты приводятся на рисунках 1-5. На рисунке-1 приводится закон распределения температуры по длине исследуемого стержня при различных значениях температуры окружающей среды.

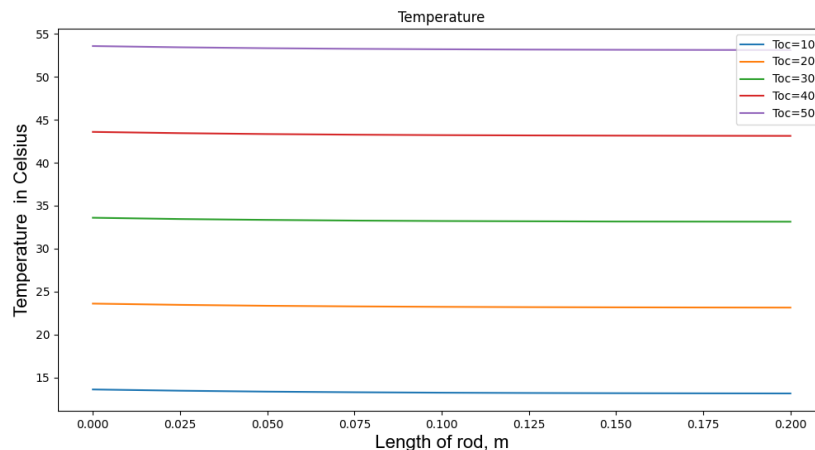


Рисунок 1- График зависимости температуры от температуры окружающей среды по длине стержня

В таблице 1 приводятся значения термического удлинения стержня при защемлении с одного конца и термического усилия, когда оба конца — защемлены при различных значениях температуры окружающей среды.

Таблица 1

$T_{oc} [^{\circ}C]$	50	40	30	20	10
$\Delta l_T [м]$	0,00013	0,00011	0,00008	0,00006	0,00003
R[H]	-30058,616	-24414,764	-18770,915	-13127,065	-7483,215

На рисунках 2-4 приводятся законы распределения термоупругих, температурных и упругих составляющих деформаций по длине исследуемого стержня в зависимости от температуры окружающей среды.

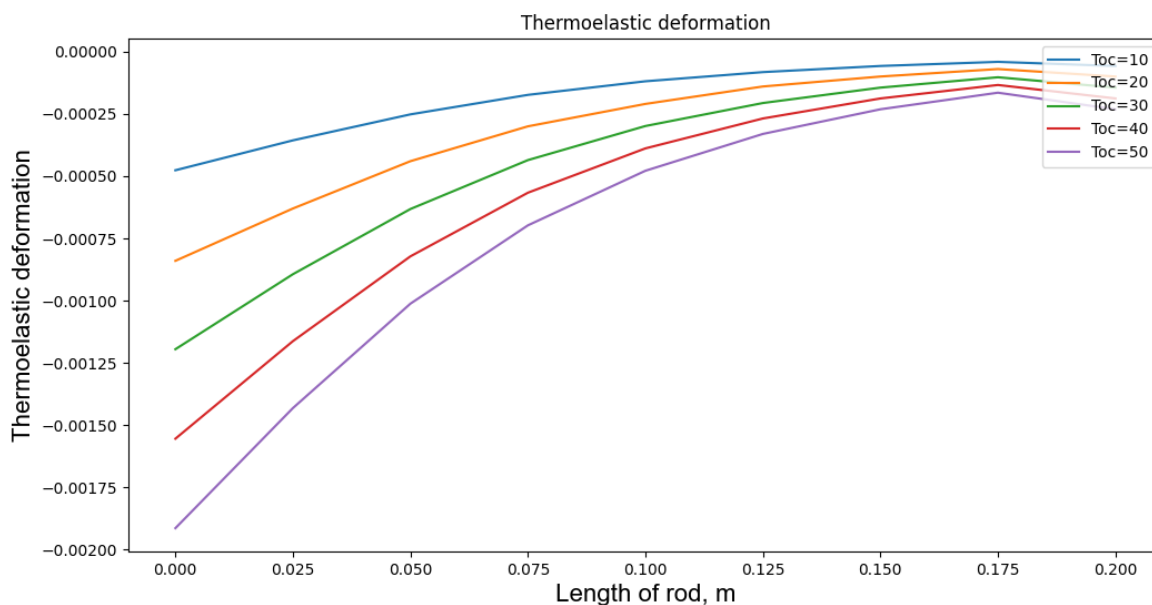


Рисунок 2 - График зависимости термоупругой деформации от температуры окружающей среды по длине стержня

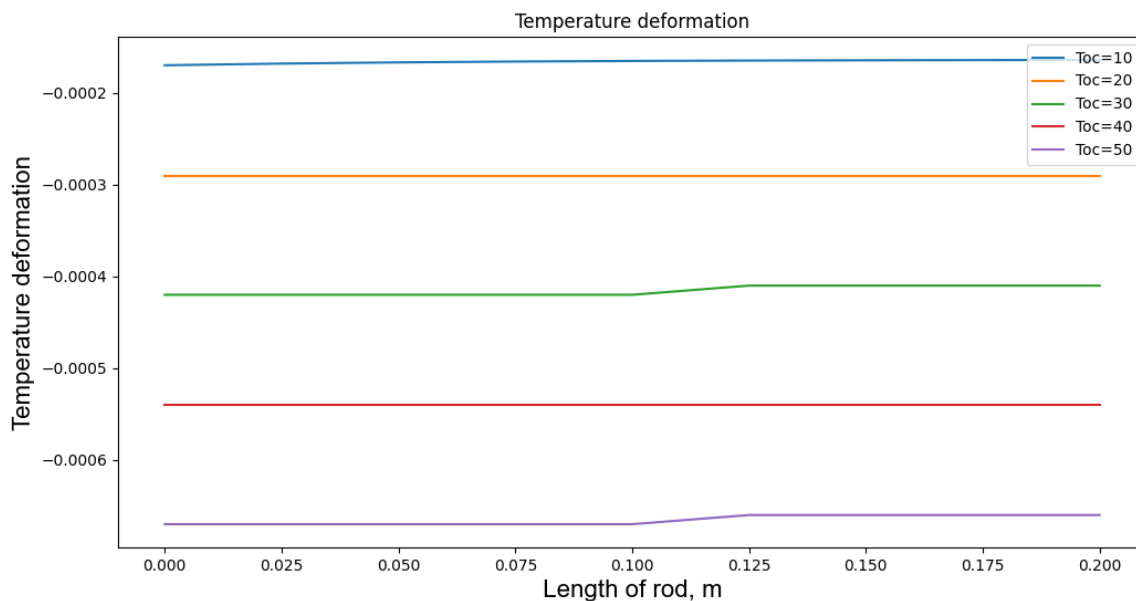


Рисунок 3 - График зависимости температурной деформации от температуры окружающей среды по длине стержня

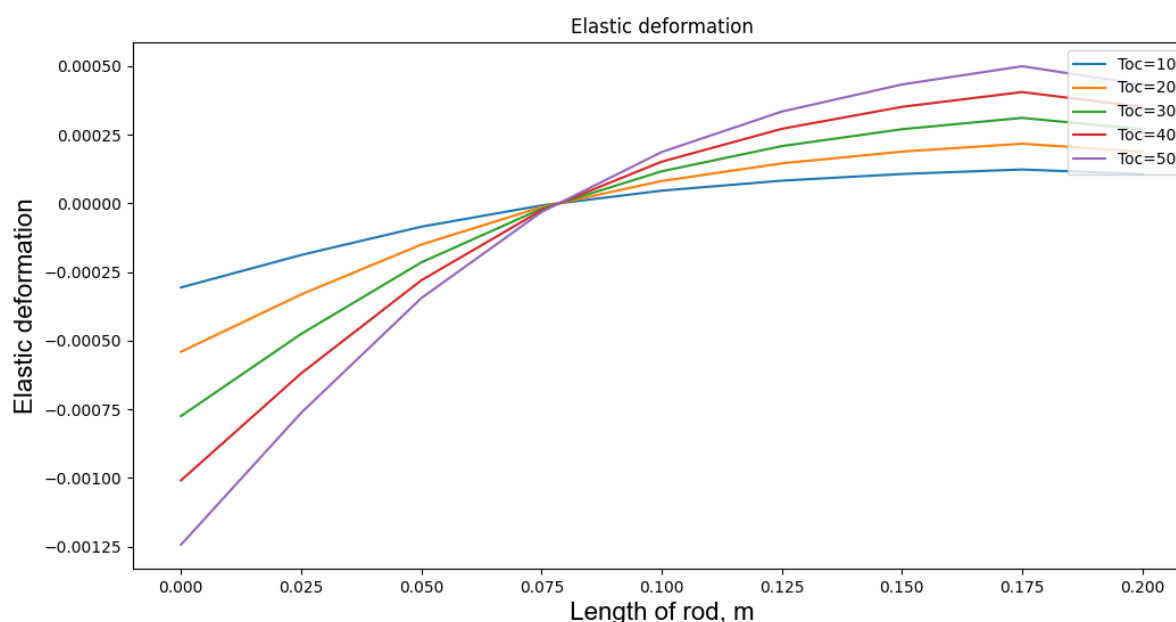


Рисунок 4 - График зависимости упругой деформации от температуры окружающей среды по длине стержня

Из этих кривых видно, что термоупругая и температурная составляющие по всей длине исследуемого стержня имеют сжимающий характер, упругая составляющая деформация на первой половине длины стержня имеет сжимающий, а на второй - растягивающий характер.

Характеры составляющих напряжений соответствует к характерам аналогичных составляющих деформаций. Так же узловое значение осоставляющих напряжений будут пропорциональны к значением соответствующих составляющих деформаций.

Закон распределения перемещения по длине стержня для различных значений температуры окружающей среды приводится на рисунке 5.

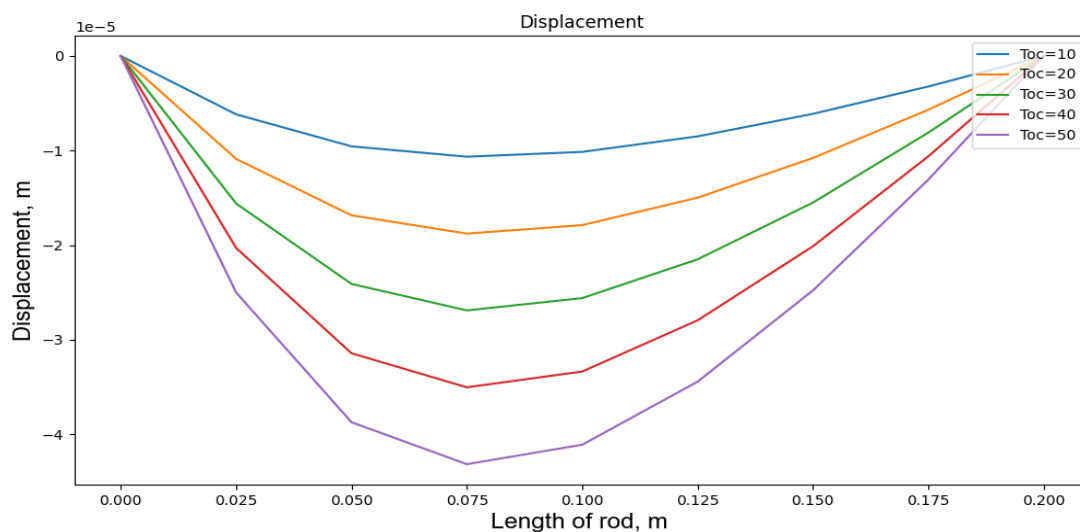


Рисунок 5 - График зависимости перемещения от температуры окружающей среды по длине стержня

Из рисунка видно, что с увеличением температуры окружающей среды увеличивается значения перемещений сечения стержня.

#### Заключение.

1. На основе баланса количества тепла разработаны вычислительный метод и алгоритм, а также программное обеспечение для исследования термо-напряженно-деформированное состояние стержня с криволинейной образующей при различных значениях окружающей среды.

2. При рассмотрении задачи влияния величины температуры окружающей среды на термо-напряженно-деформированное состояние стержня с криволинейной образующей были выявлены ряд закономерностей.

3. Исследовано изменения величины удлинения стержня в зависимости от величины температуры окружающей среды. Выявлено, что при увеличении значения температуры окружающей среды наблюдается увеличение значение всех искомых параметров.

Данная работа выполнена благодаря финансированию фундаментальных научных исследований комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан Института механики и машиноведения им. академика У.А. Джолдасбекова.

#### ЛИТЕРАТУРА

[1]J. L. Segerlind, “Applied finite element analysis”, New York-London-Sydney-Toronto, Jonh Wiley and Song, 1976.

[2]Зенкович О, Морган К. Конечные элементы и аппроксимация: Пер. с англ. –М.: Мир, 1986,-318с.

[3]M. T Arshidinova, A. Kudaykulov, A.A.Tashev, K.B. Begaliyeva, «Numerical Modeling Of Nonlinear Thermomechanical Processes In a Rod Of Variable Cross Section In The Presence Of Heat Flow», 5th International Conference on Information Science and Control Engineering, 2018.

[4]A. Kudaykulov, A. A. Tashev, A. Askarova. «Computational algorithm and the method of determining the temperature field along the length of the rod of variable cross section», Journal Open Engineering.

[5]Т. К. Коршия, В. Ф. Тишкин, А. П. Фаворский, М. Ю. Шашков. Вариационный подход к построению разностных схем для уравнения теплопроводности на криволинейных сетках. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1980, том 20, номер 2, страницы 401–421.

#### REFERENCES\*

[1] J. L. Segerlind, “Applied finite element analysis”, New York-London-Sydney-Toronto, John Wiley and Sons, 1976.

[2] Zenkovich O, Morgan K. Konechnye jelementy i аппроксимация: Пер. с англ. –М.: Mir, 1986,-318s.

[3] М. Т. Аршидинова, А. Кудайкулов, А.А.Ташев, К.В. Бегалиева, «Numerical Modeling Of Nonlinear Thermomechanical Processes In a Rod Of Variable Cross Section In The Presence Of Heat Flow», 5th International Conference on Information Science and Control Engineering, 2018.

[4] А. Кудайкулов, А. А. Ташев, А. АскарOVA. «Computational algorithm and the method of determining the temperature field along the length of the rod of variable cross section», Journal Open Engineering.

[5] Т. К. Коршия, В. Ф. Тишкин, А. П. Фаворский, М. Ю. Шашков. Вариационный подход к построению разностных схем для уравнения теплопроводности на криволинейных сетках. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1980, том 20, номер 2, страницы 401–421.

**Мукадас Аршидинова**, докторант, ҚР МҒМ ҒК ақпараттық және есептеу технологиялары институты, Алматы, Қазақстан, mukaddas\_arshidi@mail.ru

**Анарбай Кудайкулов**, ф.-м.ғ.д., профессор, Institute of Mechanics and Engineering, Алматы, Қазақстан, kudaykulov2006@mail.ru

**Азат Ташев**, т.ғ.д., профессор, Institute of Mechanics and Engineering, Алматы, Қазақстан, azattash@mail.ru

#### АЙНЫМАЛЫ ҚИМАДАҒЫ СЫРЫҚТЫҢ ТЕРМОМЕХАНИКАЛЫҚ КҮЙІН ҚОРШАҒАН ОРТА ТЕМПЕРАТУРАСЫНА БАЙЛАНЫСТЫ ЗЕРТТЕУ ӘДІСІ, АЛГОРИТМЫ ЖӘНЕ БАҒДАРЛАМАЛЫҚ ҚАМТАМАСЫ

**Андатпа.** Жұмыста көлденең қимасы айнымалы шектелген ұзындықтағы сырық қарастырылады. Сырықтың ұзындығы бойынша көлденең қимасының радиусы сызықты емес өзгереді. Осыған байланысты өзекшенің қалыптастырушысы қисық сызықты болады. Сырықтың бүйір беті жылу оқшауланған. Сырықтың сол жақ бетінің көлденең қимасының радиусы оң жақтан аз. Сырықтың сол жақ бетінің көлденең қимасына тұрақты қарқындылықтағы жылу ағыны беріледі. Сырықтың оң жақ бетінің көлденең қимасы арқылы  $T_{oc}$  [°C] ортасымен жылу алмасу жүреді.  $T_{oc} \in [10, 20, 30, 40, 50]$ °C қоршаған орта температурасының 5 жағдайы қарастырылады. Зерттелетін сырықтың термиялық-кернеулі-деформациялық күйіне қоршаған орта температурасының әсері сандық түрде зерттеледі. Бұл жағдайда негізгі шешуші теңдеулер жылу энергиясының сақталу шартынан алынады.

Қоршаған орта температурасының әсерінен қисық сызықты қалыптастырушысы бар сырықтың жылу-кернеу-деформациялық күйін зерттеу үшін бірқатар есептеу тәжірибелерін жүргізуге мүмкіндік беретін алгоритм мен бағдарлама жасалды. Температураның таралу заңы анықталды, ал сырықтың бір ұшын бекіту кезінде



термиялық ұзару анықталды. Сырықтың екі ұшын бекіту жағдайында жылу осьтік күші қоршаған ортаның температурасына байланысты анықталады. Сондай-ақ қоршаған орта температурасының мәніне байланысты деформациялар мен кернеулердің термосерпімді, температуралық және серпімді құраушыларының таралу заңдылықтары анықталды. Әрі қарай температуралық өрісті ескере отырып потенциалдық энергияны азайту әдісін қолданып, қоршаған орта температурасына байланысты орын ауыстыру өрісі анықталды.

Зерттеу жылу энергиясының сақталу заңына негізделген есептеу әдісін қолдану арқылы жүргізілді.

**Түйінді сөздер.** Сызықты емес қима, жылу ағыны, жылу алмасу, қоршаған орта температурасы, ұзару, осьтік күш, деформация, кернеу, орын ауыстыру.

**Mukaddas Arshidinova**, PhD student, Institute of Information and Computing Technologies, KN MNiVO RK, Almaty, Kazakhstan, mukaddas\_arshidi@mail.ru

**Anarbai Kudaikulov**, doctor of physical and mathematical sciences, professor, Institute of Mechanics and Engineering, Almaty, Kazakhstan, kudahkulov2006@mail.ru

**Azat Tashev**, doctor of technical sciences, professor, Institute of Mechanics and Engineering, Almaty, Kazakhstan, azattash@mail.ru

#### METHOD, ALGORITHM AND SOFTWARE FOR STUDYING THERMOMECHANICAL STATE OF A ROD OF VARIABLE CROSS SECTION AS A FUNCTION OF AMBIENT TEMPERATURE

**Abstract.** The paper considers a horizontal rod of finite length of variable cross-section. The cross-section radius of the rod varies nonlinearly along its length. Due to this, the core of the rod will be curvilinear. The side surface of this rod is thermally insulated. The cross-section radius of the left end of the rod is smaller than the right end. A heat flux of constant intensity is applied to the cross-sectional area of the left end of the rod. Through the cross-sectional area of the right end of the rod, heat exchange with the environment  $T_{oc}$  [°C] takes place. Five-case ambient temperature  $T_{oc} \in [10, 20, 30, 40, 50]$ °C is considered. The influence of the ambient temperature on the thermal stress-strain state of the rod under study is numerically investigated. The main solving equations are derived from the thermal energy conservation condition. An algorithm and a programme have been developed that allow a series of computational experiments to investigate the thermal stress-strain state of a rod with curvilinear formations under the influence of ambient temperature. The law of temperature distribution was determined and, in the case of pinching only one end of the rod, the thermal elongation was determined. In the case of pinching both ends of the rod, the thermal axial force as a function of ambient temperature is determined. Also, the laws of distribution of thermoelastic, thermal and elastic components of deformations and stresses depending on the value of the ambient temperature are determined. Further, by the method of minimisation of potential energy taking into account the temperature field, the displacement field depending on the ambient temperature was determined. The study was carried out using a computational method based on the law of conservation of thermal energy.

**Keywords.** Nonlinear section, heat flow, heat transfer, ambient temperature, elongation, axial force, deformation, stress, displacement.

\*\*\*\*\*