


**КӨЛІК, КӨЛІКТІК ИНЖЕНЕРИЯ
TRANSPORT, TRANSPORT ENGINEERING
ТРАНСПОРТ, ТРАНСПОРТНАЯ ИНЖЕНЕРИЯ**

УДК 539.3; 624.012

DOI 10.52167/1609-1817-2023-125-2-16-24

И.С. Бондарь, Н.М. Махметова , **М.Я. Квашнин**
Академия логистики и транспорта, Алматы, Казахстан
E-mail: m.narzankul@alt.edu.kz

**РАСЧЕТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ
КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЯ**

Аннотация. В статье изучено напряженно-деформированное состояние (НДС) предварительно напряженной железобетонной балки прямоугольного сечения с привлечением методов конечно-элементного анализа на базе вариационной формулировки. Железобетонная балка рассмотрена в виде неоднородного конечного элемента, причем матрица жесткости представляет суммарную матрицу жесткостей, т.е. бетона и арматурных стержней. Для расчета использован метод решения физически нелинейных задач, т.е. шаговый метод приращения нагрузки в комбинации с абсолютно устойчивой итерационной схемой Ньютона-Рафсона. Сформулированы расчетный алгоритм и методика формирования матриц балочного железобетонного элемента с учетом трещин. Модуль упругости арматуры заменен касательным модулем арматуры для тех элементов, которые имеют трещины. Многовариантные численные эксперименты сопровождались определением прогибов в среднем сечении балки, а также изучением зон формирования и развития трещинообразования. Исследовано НДС железобетонных конструкций в момент возникновения трещин в бетоне и появления пластических деформаций в арматуре на стадии проектирования. Анализ полученных результатов НДС показывает, что предлагаемый метод позволяет проследить за трещиностойкостью и жесткостью железобетонных балок на всех этапах нагружения.

Ключевые слова. Железобетон, прогиб, трещинообразование, напряжение, деформация, пластичность.

Введение.

В качестве материала балки принят железобетон, состоящий из бетона и арматурных стержней, т.е. является нелинейной и неоднородной средой, который имеет свойство к трещинообразованию. В действующих нормативных документах учтены особенности деформирования железобетонных конструкций, однако расчетные данные приведены только для линейно деформируемых элементов без учета трещинообразования. Современные железобетонные здания и сооружения имеют не только линейные плоские элементы, но и пространственные элементы, которые работают при сложных напряженных состояниях. Гипотеза плоских сечений неприменима для пространственных элементов, работающих в сложных условиях, т.е. точность и достоверность результатов расчетов зависят от правильности выбора расчетной схемы. Следовательно, результаты расчета могут не соответствовать реальному напряженному состоянию элементов конструкций. Поэтому расчет выполнен с привлечением численного метода – метода конечных элементов (МКЭ), учтены основные положения теории упругости, пластичности и методика решения нелинейных задач. МКЭ дает возможность проследить за изменением НДС элементов конструкций в любой момент нагружения. [1-4]

Железобетон представляет с собой неоднородный материал, который работает при появлении и развитии трещин различного рода. Зоны формирования и направление

развития трещин определяется на основе численных экспериментов с точностью в пределах размера конечного расчетного элемента. Цель расчета, обеспечение прочности и трещиностойкости элементов конструкций на основе анализа законов распределения напряжений и деформаций в узловых точках в процессе нагружения железобетонной балки. [5-7]

Материалы и методы.

Модель бетона представляется согласно теории пластического течения, основанной на условиях пластичности Сен-Венана, с использованием диаграммы деформирования и поверхности текучести. Пластическое течение представляет чистый сдвиг, а деформация зависит от уровня действующего напряжения. Дифференциальная форма уравнений теории течения позволяет, по сравнению с деформационной теорией, более полно отразить историю нагружения, что особенно важно в нелинейных задачах, так как итерационные методы применимы для малых приращений нагрузок. Приращение полной деформации представляется в виде суммы упругой и пластической частей вектора деформации [1]

$$d\{\varepsilon\} = d\{\varepsilon\}_e + d\{\varepsilon\}_p, \quad (1)$$

где $d\{\varepsilon\} = \{d\varepsilon_x, d\varepsilon_y, d\varepsilon_z, d\gamma_{xy}, d\gamma_{yz}, d\gamma_{xz}\}$; $d\{\varepsilon\}_e$ и $d\{\varepsilon\}_p$ - приращения упругой и пластической деформаций. Приращение вектора упругой деформации выражается через приращение вектора напряжений и матрицу упругости на основе закона Гука

$$d\{\varepsilon\}_e = [D]^{-1} d\{\sigma\}, \quad (2)$$

где $[D]$ - матрица упругих характеристик;

$d\{\sigma\} = \{d\sigma_x, d\sigma_y, d\sigma_z, d\tau_{xy}, d\tau_{yz}, d\tau_{xz}\}$ - приращение вектора напряжений.

Пластическая деформация при активном нагружении для любых напряженных состояний определяется одной и той же функцией текучести. Функция текучести характеризует переход материала из упругого состояния в пластическое, тогда согласно ассоциированного закона течения приращение вектора пластической деформации определяется соотношением:

$$d\{\varepsilon\}_p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \{\sigma\}}, \quad (3)$$

т.е. пропорционально вектору производных функции текучести по напряжениям. Здесь λ некоторый неотрицательный неопределенный множитель, характеризующий значение пластической деформации, соотношение (3) означает, что пластическое течение развивается по нормали к поверхности текучести. Функция текучести задается критерием текучести Мизеса.

Конечно-элементная модель железобетона представлена неоднородным конечным элементом, состоящим из бетона и арматурных стержней. Жесткость такого элемента определяется как сумма жесткостей бетона и арматуры, и задается для i -го элемента в виде соотношения:

$$[K]_i = [K_b] + \sum [K_s] = \int [B]^T [D_b] [B] dv + \sum_s [H]_s^T [K_s] [H]_s, \quad (4)$$

где $[D_b]$ - матрица упругих постоянных бетона;

$[K_s] = E_s A_s \int_{-1}^1 [B]^T [B] ad\xi$ - матрица жесткости, E_s, A_s - соответственно, модуль Юнга

и площадь сечения s -го арматурного стержня.

Суммируя выражение (4) по всем элементам, получим уравнения равновесия для системы в виде:

$$\{P\} = [K]\{q\}, \quad (5)$$

где $[K]$ - глобальная матрица жесткости;

$\{q\}$ - перемещения и $\{P\}$ - силы узловых точек системы.

Если упругие характеристики материала не зависят от достигнутого уровня векторов напряжений и деформаций, то между ними существует линейная зависимость, которая задается в виде соотношения (2). В случае отсутствия однозначной зависимости между векторами напряжений и деформаций берется нелинейная упругопластическая матрица, которая является касательной матрицей, связывающей приращения напряжений и деформаций:

$$\{d\sigma_b\} = [D_b]\{d\varepsilon_b\}. \quad (6)$$

Тогда основное разрешающее уравнение равновесия МКЭ для i -го элемента представляется в виде:

$$\{\Delta R\}_i = [K]_i \{\Delta q\}_i. \quad (7)$$

Путем суммирования уравнение (7) по всем элементам получим основное разрешающее уравнение МКЭ для системы в приращениях в следующем виде:

$$\{\Delta P\}_i = [K]\{\Delta q\}, \quad (8)$$

где $[K]$ - касательная матрица жесткости системы.

Анализ показал, что наиболее эффективным методом решения физически нелинейных задач применительно к основному разрешающему уравнению МКЭ (7) является метод приращения нагрузки по шагам в комбинации с абсолютно устойчивой схемой итерации Ньютона-Рафсона (рисунок 1).

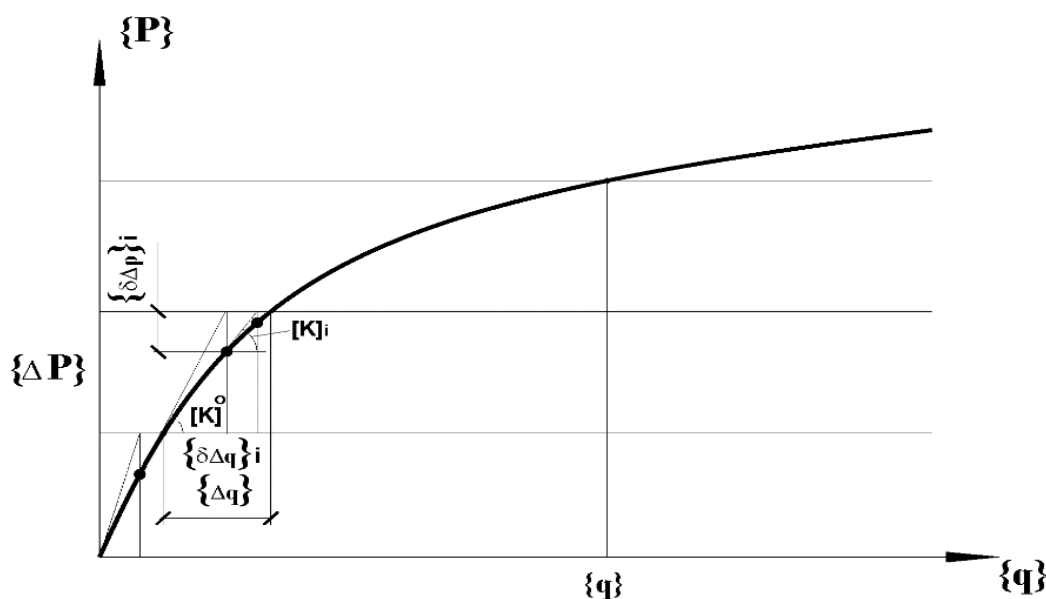


Рисунок 1 – Схема реализации шагового метода

Изложенный итерационный метод Ньютона-Рафсона представляет метод касательных жесткостей, который реально отражает физическую сущность матрицы жесткости. Ниже приведен многовариантный численный эксперимент железобетонной балки, выполненный на основе разработанной методики решения физически нелинейных задач.

Результаты.

Рисунок 2 представляет армирование балки и ее линейные размеры. В соответствии с опытными данными на балку приложена симметричная нагрузка, относительно центральной оси, по ступеням (максимальное количество ступеней равно 20) в виде сосредоточенной силы P . Предварительное напряжение моделировалось с помощью горизонтальной нагрузки, приложенной на первой ступени. Рисунок 3 содержит величины горизонтальных сил. В дальнейшем, т.е. со второй ступени, прикладывались вертикальные силы, приращение которых $\Delta P = 0,5\text{т}$. В качестве исходных характеристик материалов взяты их опытные значения: бетон - $R_b = 43,5 \text{ МПа}$, $R_{bt} = 2,5 \text{ МПа}$, $E_b = 3,6 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $\nu = 0,2$, $\varepsilon_u = 0,002$, $\varepsilon_{ut} = 0,00014$, арматура $R_s = 400 \text{ МПа}$, $E_s = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

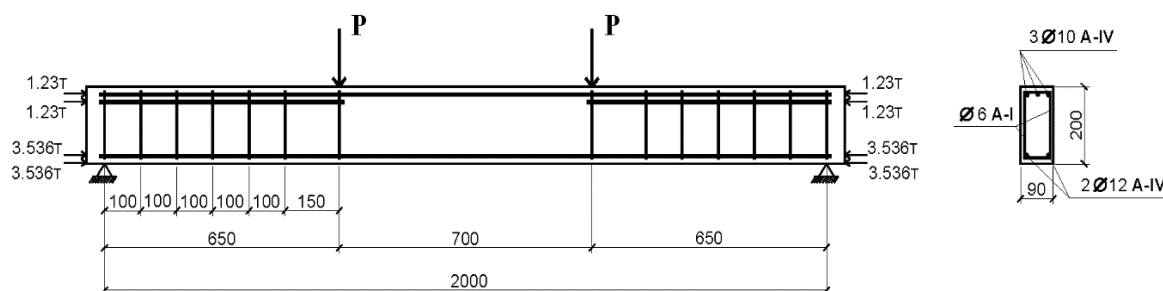


Рисунок 2 – Прямоугольное сечение предварительно напряженной балки

Для дискретизации железобетонной балки были использованы изопараметрические четырехузловые элементы и одномерные линейные элементы - вставки, адекватно описывающие механическую работу арматуры (рисунок 3).

По результатам расчетов, выполненных с использованием разработанных программ, были определены: в средних сечениях балки величины прогибов (рисунок 4); области формирования и развития процесса трещинообразования (рисунок 5). Эпюры изменения нормальных напряжений в балке по высоте сечения приведены на рисунке 6. Рисунки 7-9 содержат линии равных напряжений (изолинии) на 14 - ступени нагружения.

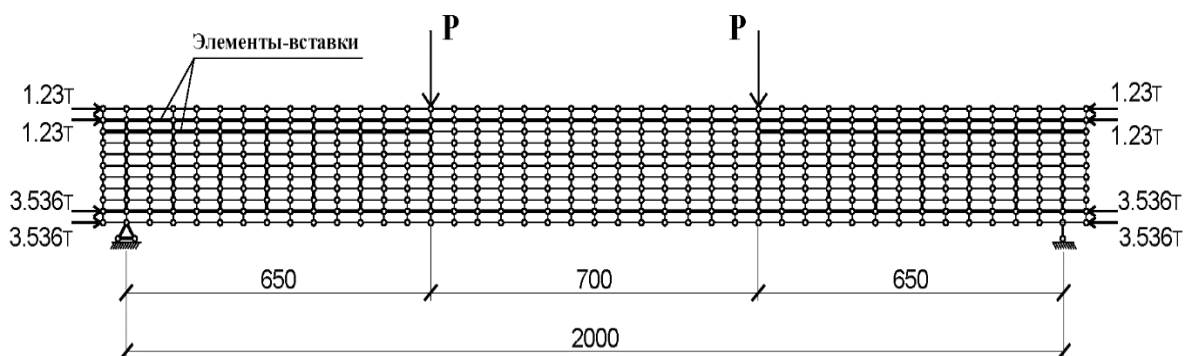


Рисунок 3 – Расчетная схема балки под действием горизонтальных сил

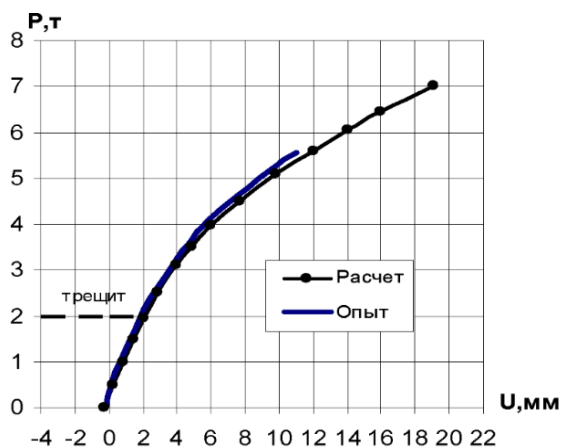


Рисунок 4 – Диаграмма прогиба в среднем сечении балки

Загружение 14 ($P = 65$ кН). Трещины в бетоне, текучесть арматуры

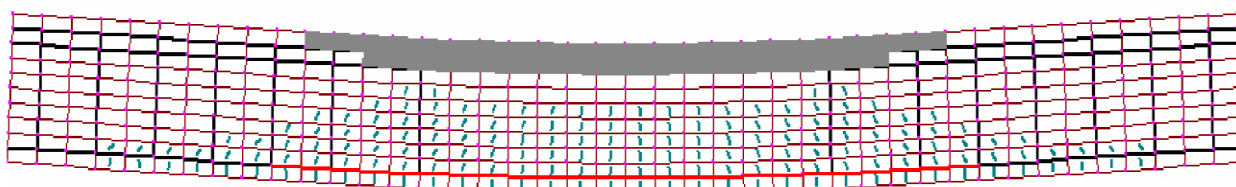


Рисунок 5 – Зоны формирования и развития трещинообразования

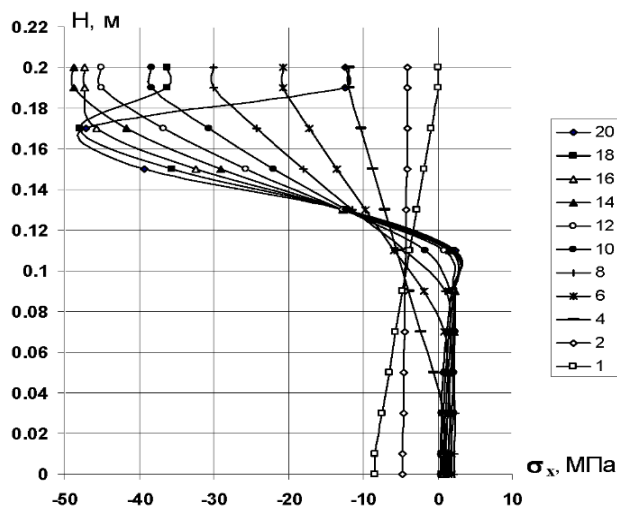


Рисунок 6 – Эпюры изменения нормальных напряжений в балке по высоте сечения

Загружение 14 ($P = 65$ кН). Напряжение σ_x в МПа

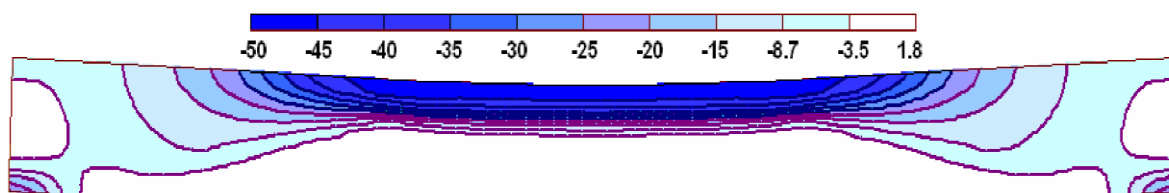


Рисунок 7 – Изолинии напряжений σ_x на 14 ступени нагружения

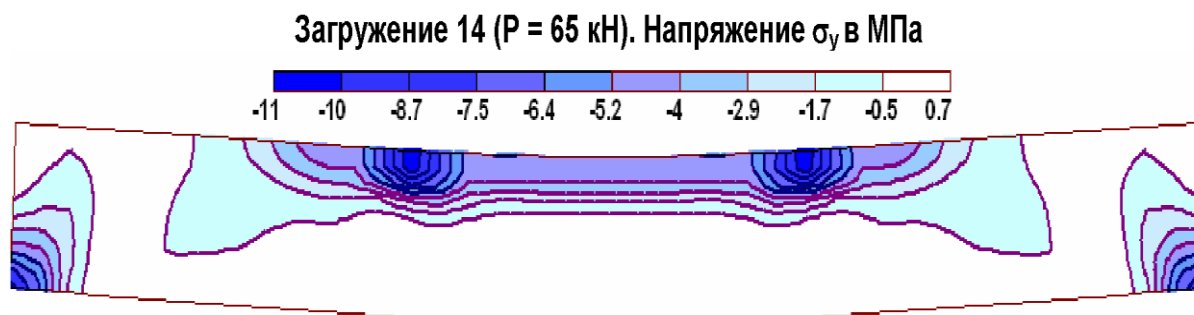


Рисунок 8 – Изолинии напряжений σ_y на 14 ступени нагружения

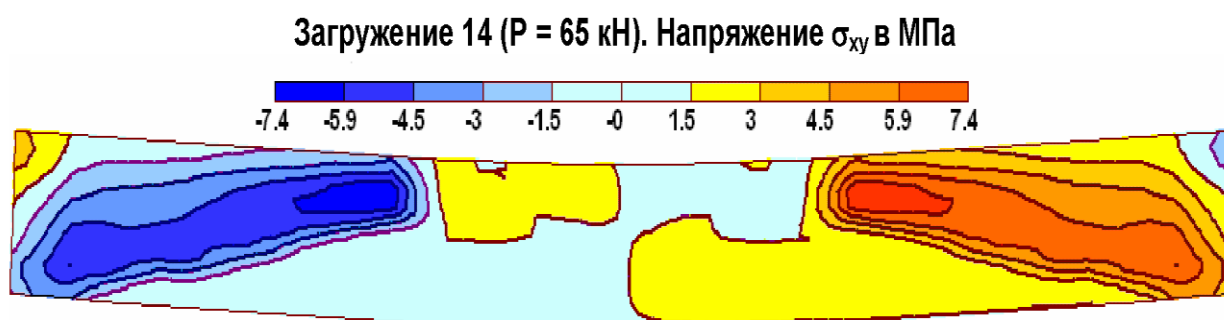


Рисунок 9 – Изолинии напряжения σ_{xy} на 14 ступени нагружения

Обсуждение.

На основе вышеизложенной методики изучено НДС в железобетонных конструкциях в момент появления и развития трещин в бетоне и формирования зон остаточных деформаций (пластических) в арматуре.

Основываясь на методе Ньютона-Рафсона получено решение нелинейной задачи с использованием не секущей, а касательной матрицы жесткости, т.е. переменной матрицы жесткости. Существенным в данном методе является вычисление неуравновешенную невязку сил. В качестве первого приближения в начале шага нагружения строится решение по линейной теории с использованием постоянной части матрицы жесткости. Переменная часть матрицы жесткости вычисляется с учетом достигнутого уровня НДС в конце шага. Затем вектор перемещений, определенный на предыдущем шаге итерации, умножается на переменную часть матрицы жесткости и принимается в качестве вектора неуравновешенной невязки сил, т.е. дополнительной нагрузки.

В случае формирования зон остаточных деформаций или появления и развития трещин вектор напряжений корректируется на основе заданной диаграммы деформирования. В связи с чем проверяется условие равновесия внутренних и внешних сил, по мере необходимости производится уравнивание этих сил [1,8-10]. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится условие равновесия внутренних и внешних сил, а напряжения, соответствующие данному моменту, являются истинными напряжениями, характеризующими реальное НДС железобетонной балки.

Разработан алгоритм построения и вычисления матрицы касательной жесткости при наличии трещин, а также введен касательный модуль для арматуры вместо модуля упругости для тех элементов, которые имеют трещины. Из сопоставления результатов метода конечных элементов с данными нормативной документации доказано, что первые нормальные трещины появляются в растянутой зоне.

На основе тщательного анализа полученных результатов выявлено, что трещины появляются под углом к арматурным стержням в случае сложного напряженного состояния, так как направление армирования не совпадает с направлениями растягивающих напряжений в бетоне. Многовариантные численные эксперименты позволили сделать вывод о том, что разработанный метод дает вполне приемлемую оценку трещиностойкости и жесткости железобетонных балок на различных этапах нагружения. Сходимость результатов, полученных по МКЭ и СНиП, в пределах допустимой погрешности.

Заключение.

Из графических представлений эпюр напряжений видно соблюдение гипотезы плоских сечений, а также приближение формы эпюры изменения нормальных напряжений в балке по высоте сечения к параболической форме. Кроме того, с ростом значения компонентов вектора напряжений уменьшается высота сжатой области в бетоне.

На основе анализа результатов, полученных по МКЭ, доказано, что первые трещины возникли при сосредоточенной силе $P = 1$ т и уровне напряжении $\sigma_x = 8.8$ МПа (на 3 ступени нагружения). При величине сосредоточенной силы $P = 6.5$ т (на 14 ступени нагружения) произошло разрушение балки. В сжатой области в момент разрушения напряжение достигло значения $\sigma_x = 43.1$ МПа, а прогиб составил 13 мм. Полученные результаты численных экспериментов с допустимой погрешностью сходятся с результатами опытных данных и нормами, приведенными в Еврокоде [4].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Makhmetova N.M., Solonenko V.G. Metod konechnykh ehlementov v zadachakh-transportnogo stroitelstva [In Russian: Method of finite elements in the problems of transport construction. Textbook], // Almaty: KazATC, 2013. – 441s.

[2] Agapov V.P., Nikolaev V.B., Golovanov R.O. Raschet zhelezobetonnykh plit, usilennykh kompozitnymi tkaniami, metodom konechnykh elementov [In Russian: Calculation of reinforced concrete slabs reinforced with composite fabrics by finite element method. Construction mechanics of engineering structures and constructions], MSCU, 2018 - 14(2), pp. 120-131. <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2018-14-2-120-131>

[3] Ivan S. Bondar, Michael Ya. Kvashnin, Dinara Aldekeyeva, Saule Bekzhanova, Aliya Izbaïrova, Assem Akbayeva. Influence of the deformed state of a road bridge on operational safety. Influence of the deformed state of a road bridge on operational safety. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 2 (7 (116)), Pages 29–34. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2022.255275>

[4] ТКР EN 1992-2-2009 (02250) Evrokod 2. [In Russian: ТКР EN 1992-2-2009 (02250) Eurocode 2. DESIGN OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURES. Part 2. Reinforced concrete bridges. Design and calculation rules], 2009. – 96s.

[5] Bondar I.S., Salman Daud Salman Al-Dulaimi, Aldekeyeva D.T., Imambaeva R.S. Issledovaniia napriazhenno-deformirovannogo sostoianiia zhelezobetonnykh balok, armirovannykh ugleplastikami [In Russian: Studies of the stress-strain state of reinforced concrete beams reinforced with carbon plastics], Bulletin of the KazGASA. - Almaty, 2021. - № 4(82). - P. 101-110. <https://doi.org/10.51488/1680-080X/2021.4-05>

[6] Klovanih S.F. Metod konechnykh elementov v nelineinykh raschetakh prostranstvennykh zhelezobetonnykh konstruksii [In Russian: Method of finite elements in the nonlinear calculations of spatial reinforced concrete structures. Textbook for students and

postgraduates of railway transport universities], // Odessa: publishing house ONMU, 2009. - 89 s.

[7] Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L. (2005). The Finite Element for Solid and Structural. Mechanics. Sixth edition. McGraw-Hill, 631p.

[8] V. Solonenko, N. Mahmetova, V. Nikolaev, S. Bekzhanova, M. Ya. Kvashnin, I.S. Bondar, S. Mirzabaev. Analysis of the stress-strain state of travel pipes with the use of hardware and software complex. News of the national academy of sciences of the republic of Kazakhstan. Series of geology and technical sciences. Volume 1, Number 439 (2020), Pages 181 – 188, <https://doi.org/10.32014/2020.2518-170X.22>

[9] Seidulla S. Abdullayev, Gabit B. Bakyt, Ivan S. Bondar, Muslim N. Aikumbekov, Yerlan T. Auyesbayev. Determination of natural modes of railway overpasses. Journal of Applied Research and Technology 19 (2021) 1-10, Volume 19, Number 1 February (2021), Pages 1 – 10, <https://jart.icat.unam.mx/index.php/jart/issue/view/82>.

[10] Bondar I.S., Kvashnin M.Y., Aldekeyeva D.T. Napriazhenno-deformirovannoe sostoianie zhelezobetonного puteprovoda pod nagruzkoi [In Russian: Stress-strain state of a reinforced concrete overpass under load], World of Transport, - Moscow, 2020. - Vol. 18, No. 2. - P. 68-81., <https://doi.org/10.30932/1992-3252-2020-18-68-81>

Иван Бондарь, PhD, профессор, Логистика және көлік академиясы, Алматы, Қазақстан, b.ivan@alt.edu.kz;

Нарзанкул Махметова, т.ғ.д., профессор, Логистика және көлік академиясы, Алматы, Қазақстан, m.narzankul@alt.edu.kz;

Михаил Квашнин, т.ғ.к., профессор, Логистика және көлік академиясы, Алматы, Қазақстан, k.michail@alt.edu.kz.

ЖАРЫҚТЫҢ ПАЙДА БОЛУЫН ЕСКЕРЕ ОТЫРЫП, АЛДЫН АЛА КЕРНЕЛГЕН ТЕМІРБЕТОН КОНСТРУКЦИЯЛАРЫН ЕСЕПТЕУ

Аңдатпа. Мақалада Вариациялық тұжырымдау негізінде шекті элементтік талдау әдістерін қолдана отырып, тікбұрышты қиманың алдын-ала кернелген темірбетон білеуінің кернеулі-деформацияланған күйі (КДК) зерттелген. Темірбетон білеуі біртекті емес шекті элемент ретінде қарастырылады, ал қаттылық матрицасы ретінде қаттылықтың қосынды матрицасы алынады, яғни бетон және арматуралық стержіндердің. Есептеу үшін физикалық сызықтық емес есептерді шешу әдісі, яғни Ньютон-Рафсонның абсолютті тұрақты итерациялық схемасымен біріктірілген жүктеменің өсімше қадамдық әдісі қолданылады. Жарықтарды ескере отырып, білеу темірбетон элементінің матрицаларын қалыптастырудың есептеу алгоритмі мен әдістемесі тұжырымдалған. Арматураның серпімділік модулі жарықтары бар элементтер үшін жанама арматура модулімен ауыстырылады. Көп вариантты сандық эксперименттер білеудің ортаңғы бөлігіндегі ауытқуларды анықтаумен, сондай-ақ жарықтардың пайда болу және даму аймақтарын зерттеумен қатар жүрді. Бетондағы жарықтар және арматурада пластикалық деформациялар пайда болған кезде темірбетон конструкцияларының кернеулі деформацияланған күйі жобалау кезеңінде зерттелді. Алынған КДК нәтижелерін талдау ұсынылған әдіс жүктеменің барлық кезеңдерінде темірбетон арқалықтарының жарыққа төзімділігі мен қаттылығын бақылауға мүмкіндік беретіндігін көрсетеді.

Түйінді сөздер. Темірбетон, иілу, жарықтар, кернеу, деформация, пластика.

Ivan Bondar, PhD., associate professor, Academy of logistics and transport, Almaty, Kazakhstan, b.ivan@alt.edu.kz

Narzankul Makhmetova, doctor of technical sciences, professor, Academy of logistics and transport, Almaty, Kazakhstan, m.narzankul@alt.edu.kz

Mikhail Kvashnin, candidate of technical sciences, professor, professor of ALT, Academy of logistics and transport, Almaty, Kazakhstan, k.michail@alt.edu.kz

CALCULATION OF REINFORCED CONCRETE PRESTRESSED STRUCTURES WITH REGARD TO CRACKING

Abstract. The paper studies the stress-strain state (STS) of a prestressed reinforced concrete beam of rectangular cross-section using the methods of finite element analysis based on the variational formulation. The reinforced concrete beam is considered as an inhomogeneous finite element, and the stiffness matrix represents the total matrix of stiffnesses, that is, of the concrete and reinforcement bars. The method of solving physically nonlinear problems, that is the stepwise method of incremental loading in combination with the absolutely stable Newton-Raphson iteration scheme, is used for the calculation. A computational algorithm and a method for forming matrices of a beam reinforced concrete element with allowance for cracks have been formulated. The modulus of elasticity of reinforcement has been replaced by the tangential modulus of reinforcement for those elements that have cracks. Multivariate numerical experiments were accompanied by determining the deflections in the average cross section of the beam, as well as studying the zones of formation and development of cracks. The stress-strain state of reinforced concrete structures at the moment of cracking in concrete and appearance of plastic deformations in the reinforcement at the design stage was studied. Analysis of the obtained results of the deflected mode shows that the proposed method makes it possible to trace the crack resistance and stiffness of reinforced concrete beams at all stages of loading.

Keywords. Reinforced concrete, deflection, cracking, stress, deformation, plasticity.
